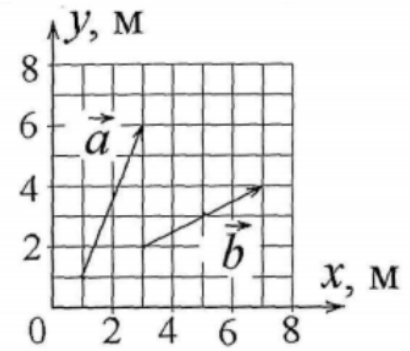
Введение в физику

Контрольная работа №1

Вариант №6

6.1. Найти модуль разности векторов $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$ и косинус угла α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ответ округлить до двух значащих цифр.



Решение:

Начало вектора $\overline{a}$: $(x_1, y_1)=(1,1)$, конец вектора $\overline{a}$: $(x_2, y_2)=(3,6)$.

Координаты вектора $\overline{a}(x_2-x_1, y_2-y_1)=\overline{a}(a_x, a_y)=\overline{a}(3-1, 6-1)=\overline{a}(2,5)$.

Начало вектора $\overline{b}$: $(x_1, y_1)=(3,2)$, конец вектора $\overline{b}$: $(x_2, y_2)=(7,4)$.

Координаты вектора $\overline{b}(x_2-x_1, y_2-y_1)=\overline{b}(b_x, b_y)=\overline{b}(7-3, 4-2)=\overline{b}(4,2)$.

При вычитании двух векторов, вычитаем поэлементно их координаты:

$$\overline{a}-\overline{b}=(a_x, a_y)-(b_x, b_y)=(a_x-b_x, a_y-b_y)=$$
$$=(2,5)-(4,2)=(2-4,5-2)=(-2,3)$$

Модуль разности векторов:

$$\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}=3,6$$

Косинус угла α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$$

Длины векторов:

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{b_x^2+b_y^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

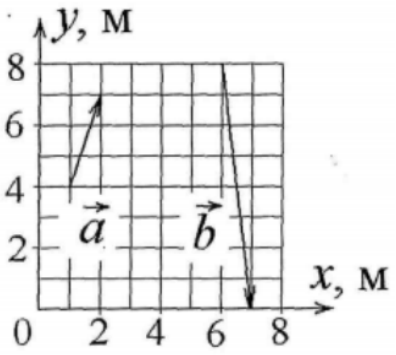
Косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{(2,5)\cdot(4,2)}{\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{2\cdot 4+5\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{5}} = 0,75$$

Ответ: $\left|\overline{a}-\overline{b}\right| = 3,6;\ \cos\alpha = 0,75.$

6.2. Найти модуль суммы векторов $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|$ и модуль векторного произведения $\left\|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right\|$.

Ответ округлить до двух значащих цифр.



Решение:

Начало вектора $\bar{a}$: $(x_1, y_1)=(1, 4)$, конец вектора $\bar{a}$: $(x_2, y_2)=(2, 7)$.

Координаты вектора $\bar{a}(x_2-x_1, y_2-y_1)=\bar{a}(a_x, a_y)=\bar{a}(2-1, 7-4)=\bar{a}(1, 3)$.

Начало вектора $\bar{b}$: $(x_1, y_1)=(6, 8)$, конец вектора $\bar{b}$: $(x_2, y_2)=(7, 0)$.

Координаты вектора $\bar{b}(x_2-x_1, y_2-y_1)=\bar{b}(b_x, b_y)=\bar{b}(7-6, 0-8)=\bar{b}(1, -8)$.

При сложении двух векторов, складываем поэлементно их координаты:

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_x, a_y)+(b_x, b_y)=(a_x+b_x, a_y+b_y)=$$
$$=(1+1,3+(-8))=(2, -5)$$

Модуль суммы векторов:

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}\approx 5,4$$

Длины векторов:

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

$$\left|\bar{b}\right|=\sqrt{b_x^2+b_y^2}=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$$

Косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{(1,3)\cdot(1,-8)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{65}} = \frac{1\cdot 1+3\cdot(-8)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{65}} =$$

$$= -\frac{23}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{65}} = -0,9021$$

Используем тригонометрическое равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ или $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Модуль векторного произведения:

$$\left|\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]\right| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\alpha = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{10}\cdot\sqrt{65}\cdot\sqrt{1-(0,9021)^2} = 11$$

Ответ: $|\overline{a}+\overline{b}| = 5,4;\ \left|\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]\right| = 11.$

6.3. Найти значение производной от функции $f(x)=\sin(\cos x)+4x^5$ в точке с координатой $x=1$.

Решение:

Производная заданной функции:

$$f'(x)=\left(\sin(\cos x)+4x^5\right)'=\left(\sin(\cos x)\right)'+\left(4x^5\right)'=$$
$$=\cos(\cos x)\cdot(\cos x)'+4\cdot 5x^4=$$
$$=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)+20x^4=$$
$$=20x^4-\sin x\cdot\cos(\cos x)$$

Значение производной от функции в точке с координатой $x=1$:

$$f'(1)=20\cdot 1^4-\sin 1\cdot\cos(\cos 1)=19{,}3$$

Ответ: $f'(1)=19{,}3$.

6.4. Найти частные производные z_x' и z_y' функции $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Решение:

Частные производные находим по обычным формулам дифференцирования для функции одной переменной, причем z_x' находим, считая "y" постоянной величиной; при отыскании z_y' считаем "x" постоянным:

$$z_x' = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_x' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_x' = \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$z_y' = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y}$$

Ответ: $z_x' = \frac{2x}{x^2 + y}$; $z_y' = \frac{1}{x^2 + y}$.

6.5. Найти градиент функции $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z$ в точке $M\left(1, 3, 2\right)$.

Решение:

Найдем частные производные и их значения в точке M:

$$u_x' = \left(\ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z\right)_x' = \frac{1}{3 - x^2} \cdot \left(3 - x^2\right)_x' + y^2z =$$

$$= -\frac{2x}{3 - x^2} + y^2z$$

$$u_x'\left(M\right) = -\frac{2 \cdot 1}{3 - 1^2} + 3^2 \cdot 2 = -1 + 18 = 17$$

$$u_y' = \left(\ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z\right)_y' = 2xyz$$

$$u_y'\left(M\right) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$u_z' = \left(\ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z\right)_z' = xy^2$$

$$u_z'\left(M\right) = 1 \cdot 3^2 = 9$$

Градиент функции u в точке M:

$$\overline{gradu}\left(M\right) = u_x' \cdot \overline{i} + u_y' \cdot \overline{j} + u_z' \cdot \overline{k} = 17 \cdot \overline{i} + 12 \cdot \overline{j} + 9 \cdot \overline{k}$$

Ответ: $\overline{gradu}\left(M\right) = 17 \cdot \overline{i} + 12 \cdot \overline{j} + 9 \cdot \overline{k}$.